

Introduction à l'énumération des animaux dirigés

Axel Bacher

sous la direction de Mireille Bousquet-Mélou

1 Animaux dirigés

Soit R un réseau (ici, un graphe infini périodique). On appelle *animal* toute partie connexe finie de R (figure 1).

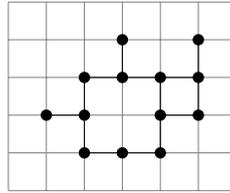


FIG. 1 – Un animal sur le réseau carré.

Le problème consistant à calculer le nombre a_n d'animaux (à translation près) de cardinal (ou *aire*) n est un problème qui a été posé il y a quelques décennies [7] et qui n'est toujours pas résolu. Les seules informations connues le sont sur le comportement asymptotique des nombres a_n : plus précisément, il existe un réel K tel que

$$a_n^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K$$
$$3,87 < K < 4,65.$$

Plutôt que de chercher à dénombrer tous les animaux, on s'intéresse ici à une sous-classe, celle des *animaux dirigés*. Appelons cette fois R un graphe infini *orienté*, comme par exemple le *réseau carré dirigé*, muni d'un point origine s appelé *source*. Un animal dirigé sur le réseau R est un ensemble fini A de sommets de R contenant s et tel que pour tout sommet x de A il existe un chemin de s à x ne passant que par des points de A .

Contrairement aux animaux généraux, les séries génératrices comptant les animaux dirigés sur ces réseaux selon l'aire sont bien connues [1, 5, 6], et étonnamment simples :

Théorème 1. *Les séries génératrices comptant les animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire sont*

$$A(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right) \quad (1)$$

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1 \right). \quad (2)$$

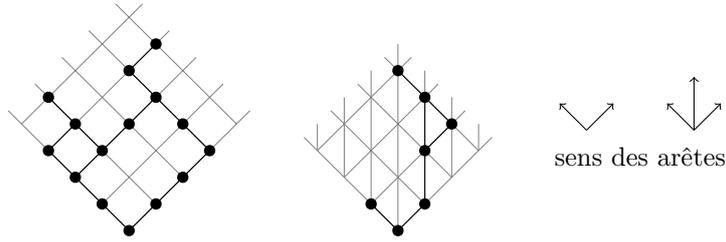


FIG. 2 – Animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire.

Il existe également un troisième réseau sur lequel les animaux dirigés ont été étudiés, le *réseau hexagonal*, mais le problème du dénombrement selon l'aire sur ce réseau reste ouvert.

2 Animaux dirigés et empilements de pièces

L'une des manières les plus simples de prouver l'égalité (1) consiste à considérer la bijection avec d'autres objets appelés *empilements de pièces* (voir [1]). La transformation est illustrée figure 3.

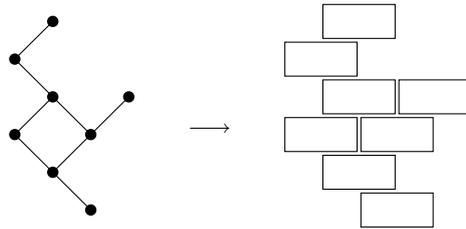


FIG. 3 – De l'animal dirigé à l'empilement de pièces.

Un empilement de pièces (ici, de *dominos*) est un ensemble de pièces caractérisées par une *position* et une *hauteur*, tel que :

1. deux pièces ne se chevauchent jamais,
2. toute pièce à hauteur > 1 repose au moins partiellement sur une pièce située immédiatement en dessous.

Plus formellement, la définition est la suivante.

Définition 2. Soit P un ensemble de positions, et soit \mathcal{C} une relation réflexive symétrique sur P dite de *concurrence*. Un empilement de pièces du modèle (P, \mathcal{C}) est une partie finie E de $P \times \mathbb{N}^*$ vérifiant :

1. si (p, n) et (q, n) sont dans E , alors p et q ne sont pas concurrentes ;
2. si (p, n) est dans E avec $n > 1$, alors il existe $(q, n - 1)$ dans E tel que p et q soient concurrentes.

L'ensemble des pièces de hauteur 1 constitue la *base* d'un empilement ; un empilement dont la base est un singleton sera appelé *pyramide*. Un empilement

E sera de plus dit *strict* si deux pièces situées à la même position ne sont jamais situées directement l'une sur l'autre; autrement dit, si on n'a jamais (p, n) et $(p, n + 1)$ dans E . Ainsi, la transformation de la figure 3 fournit une bijection préservant le cardinal entre les animaux dirigés sur le réseau carré et les *pyramides strictes de dominos*. De même, on peut montrer une bijection semblable entre les animaux dirigés sur réseau triangulaire et les pyramides non nécessairement strictes de dominos.

L'intérêt de cette vision tient au fait qu'on peut définir une opération de *composition* entre deux empilements de pièces E et F . L'empilement composé $E \cdot F$ est l'empilement obtenu en laissant tomber F sur E , les pièces tombant jusqu'à reposer sur une autre pièce (figure 4).

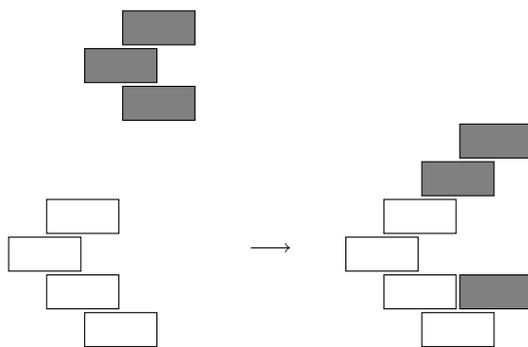


FIG. 4 – Composition de deux empilements.

Inversement, il est possible de factoriser un empilement E , en tirant une pièce x de E vers le haut ainsi que toutes les pièces qui sont entraînées (figure 5). Ces

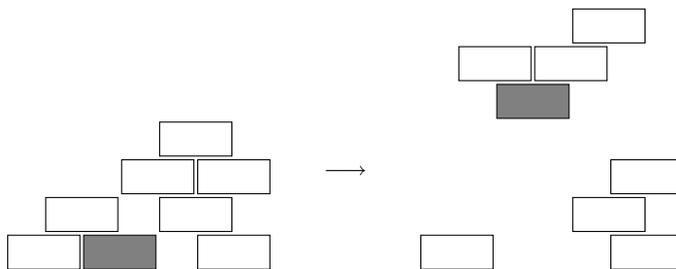


FIG. 5 – Factorisation d'un empilement.

deux opérations permettent de décomposer les pyramides strictes de dominos. Pour cela, on introduit la notion de *demi-animal*, ou animal dirigé vivant dans le huitième de plan défini par $i \geq j \geq 0$. On décompose ensuite les demi-animaux et animaux comme indiqué figure 6.

Transposée en terme de séries, cette décomposition devient

$$D(t) = t(1 + D(t) + D(t)^2) \tag{3}$$

$$A(t) = D(t) + D(t)A(t). \tag{4}$$

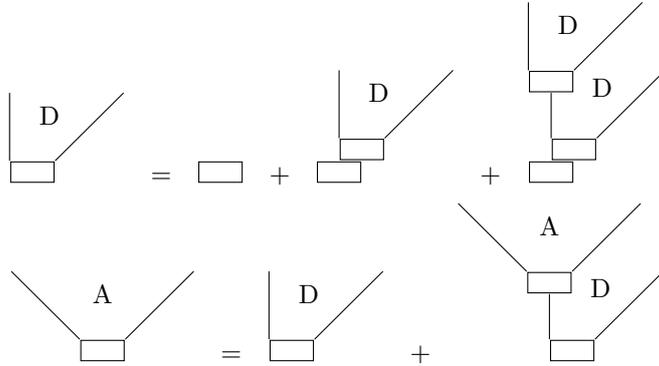


FIG. 6 – Décomposition des animaux dirigés sur le réseau carré.

La résolution de ces équations permet de retrouver le théorème 1. Une méthode similaire permet de décomposer les pyramides générales, et donc de déduire la formule (2) concernant les animaux dirigés sur le réseau triangulaire.

3 Dénombrement selon d'autres paramètres

Le principal but de la recherche actuelle sur les animaux dirigés consiste à raffiner les formules (1) et (2) afin de prendre en compte d'autres paramètres que l'aire. En voici une liste non exhaustive.

3.1 Nombre de sites portés à gauche

Un site autre que la source d'un animal dirigé sur réseau carré est nécessairement porté soit à gauche, soit à droite, soit les deux ; on parle alors de *boucle* (figure 7). On peut, par exemple, s'intéresser donc au *nombre de sites portés uniquement à gauche*.



FIG. 7 – Les trois types de sites en réseau carré.

Proposition 3. *La série génératrice comptant les animaux dirigés sur le réseau carré selon l'aire et le nombre de sites portés seulement à gauche est*

$$A_g(t, u) = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{4t}{(1+t)(1+t-tu)} \right)^{-1/2} - 1 \right). \quad (5)$$

Un résultat similaire est connu pour le réseau triangulaire, où les sites peuvent être portés à gauche, à droite, en dessous, ou n'importe quelle combinaison des trois. Pour des preuves de ces résultats, et d'autres, on pourra se référer à [2].

3.2 Périmètre de site

Un *voisin* d'un animal dirigé A est par définition un sommet v du réseau qui n'est pas dans A et tel que $A \cup \{v\}$ reste un animal dirigé. On appelle *périmètre de site* d'un animal dirigé son nombre de voisins. La série bivariable comptant les animaux dirigés selon l'aire et le périmètre de site n'est pas connue, et probablement non algébrique. En revanche, son premier moment (qui permet d'obtenir le périmètre de site *moyen* des animaux dirigés d'aire n) fait l'objet d'une conjecture, proposée par Conway [4], et prouvée dans mon mémoire de M2.

Conjecture 4. Notons $A(t, r)$ la série comptant les animaux dirigés sur le réseau carré selon l'aire et le périmètre de site. On a

$$\frac{\partial A}{\partial r}(t, 1) = \frac{1 - 3t + 2t^2 + t^3 - 3t^4}{2t[(1+t)(1-3t)]^{3/2}} - \frac{1-t-t^2}{2t(1+t)}. \quad (6)$$

En revanche, aucun équivalent n'est connu en réseau triangulaire, où il semble que le premier moment n'est pas algébrique.

3.3 Hauteur

La *hauteur* d'un animal dirigé se définit comme le maximum de la quantité $i + j + 1$ quand (i, j) parcourt l'animal. La hauteur est un paramètre encore plus difficile à étudier que le périmètre, puisque aucun résultat exact n'a pu être conjecturé même pour la hauteur moyenne. Il semble, là encore, que les séries concernées ne sont pas algébriques. La conjecture suivante concerne le comportement asymptotique de la hauteur moyenne :

Conjecture 5. La hauteur moyenne h_n des animaux dirigés d'aire n sur le réseau carré vérifie :

$$h_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \kappa n^\gamma \quad (7)$$

où κ et γ sont des constantes.

En revanche, la valeur de la constante γ n'est pas connue, et on soupçonne qu'elle n'est pas rationnelle.

4 Réseaux bornés

Pour finir, mentionnons une autre approche de l'énumération des animaux dirigés, consistant à étudier des réseaux *bornés* en largeur (voir figure 8). L'intérêt

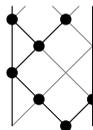


FIG. 8 – Un animal dirigé sur le réseau carré borné de largeur 4.

principal est que toutes les séries (y compris les séries à plusieurs variables) qu'on

veut calculer sont *rationnelles*. Lorsque l'on est capable de calculer (ou de deviner) ces séries pour toute largeur n , un simple passage à la limite fournit la série correspondante sur le réseau non borné.

Un autre type de réseau est souvent utilisé, les réseaux bornés *cylindriques*, obtenus en joignant les deux bords.

4.1 Résultats théoriques

Plusieurs méthodes permettent de trouver des résultats théoriques (i.e. pour toute largeur du réseau) d'énumération d'animaux dirigés sur réseaux bornés; l'une d'entre elles consiste, une fois encore, à voir les animaux comme des empilements de dominos. La théorie générale des empilements [1, 9] permet de dénombrer les animaux selon l'aire, par exemple :

Proposition 6. *La série génératrice comptant les demi-animaux dirigés sur le réseau carré borné de largeur n est donnée par :*

$$D_n\left(\frac{t}{1-t}\right) = \frac{F_{n-1}(t)}{F_n(t)} - 1$$

où les $F_n(t)$ sont les polynômes de Tchebycheff définis par

$$\begin{aligned} F_0(t) &= F_{-1}(t) = 1 \\ F_n(t) &= F_{n-1}(t) - tF_{n-2}(t) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

La plupart des résultats connus en réseau non borné le sont également en réseau borné; ainsi, on connaît la série comptant les animaux sur les réseaux triangulaires bornés, la série comptant les animaux selon l'aire et le nombre de sites portés seulement à gauche...

4.2 Résultats expérimentaux

Lorsqu'on ne connaît pas de résultat théorique à un problème (comme le problème de la hauteur), l'avantage des réseaux bornés est qu'il est toujours possible de calculer les séries qui nous intéressent pour une valeur fixée de la largeur du réseau. Considérons, par exemple, le réseau carré cylindrique de largeur $2n$, représenté figure 9.

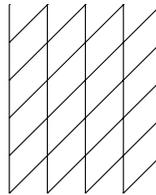


FIG. 9 – Le réseau carré cylindrique de largeur 8.

Un animal du réseau de largeur $2n$ peut être vu comme une suite de *couches*, chaque couche étant une partie de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Les arêtes du graphe déterminent quelles couches peuvent être posées sur quelles autres. Un animal peut donc se voir comme un calcul dans un automate fini, dont les états sont

les 2^n couches possibles. La matrice d'adjacence de cet automate est la matrice M , de taille 2^n , dont le coefficient en (C, D) vaut $t^{|D|}$ si D s'empile sur C , et 0 sinon. Il est classique (voir par exemple [8], chapitre 4) de voir que la série comptant les animaux dirigés de source s est donnée par

$$A_{n,s}(t) = t((1 - M)^{-1}U)_{\{s\}} \quad (8)$$

où U est le vecteur colonne ne contenant que des 1.

Cette méthode peut également s'adapter pour calculer d'autres séries : ainsi, il est aisé de voir que

$$tx((1 - xM)^{-1}U)_{\{s\}}$$

compte les animaux dirigés selon l'aire et la hauteur, et que

$$t((1 - M)^{-2}U)_{\{s\}}$$

compte la hauteur totale des animaux dirigés d'aire donnée (donc permet de trouver la hauteur moyenne).

Pour la rendre utilisable algorithmiquement, il reste à trouver un moyen de réduire la taille prohibitive de la matrice M . Pour cela, examinons la matrice associée au réseau cylindrique de largeur 6 (en retirant la couche vide) :

$$\begin{pmatrix} t & t & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & t & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ t & 0 & t & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

On constate que de nombreuses lignes sont identiques, i.e. que certaines couches déterminent le même « voisinage » (les couches qu'on peut empiler dessus sont les mêmes). Il est possible de réduire la taille de la matrice en fusionnant ces colonnes. Ici, on obtient :

$$\begin{pmatrix} t & t & 0 & t^2 \\ 0 & t & t & t^2 \\ t & 0 & t & t^2 \\ t & t & t & 3t^2 + t^3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on peut tirer parti des symétries du réseau : le réseau cylindrique de largeur $2n$ a ainsi $2n$ automorphismes correspondant au groupe diédral. Ici, on peut fusionner à nouveau les trois premières lignes pour obtenir la matrice finale :

$$\begin{pmatrix} 2t & t^2 \\ 3t & 3t^2 + t^3 \end{pmatrix}.$$

Références

- [1] J. Bétréma et J.-G. Penaud, *Modèles avec particules dures, animaux dirigés et séries en variables partiellement commutatives*, arXiv:math/0106210v1 [math.CO], 2001.

- [2] M. Bousquet-Mélou, *New enumerative results on two-dimensional directed animals*, Discrete Math., 180(1-3) :73–106, 1998.
- [3] A. Conway et A. Guttmann, *Longitudinal size exponent for square-lattice directed animals*, J. Phys. A, 27(21) :7007–7010, 1994.
- [4] A. Conway, *Some exact results for moments of 2D directed animals*, J. Phys. A, 29(17) :5273–5283, 1996.
- [5] D. Dhar, *Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter’s hard-square lattice-gas model*, Phys. Rev. Lett., 49(17) :959–962, 1983.
- [6] D. Gouyou-Beauchamps et G.X. Viennot, *Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem*, Adv. in Appl. Math., 9(3) :334–357, 1988.
- [7] D.A. Klarner, R.L. Rivest, *A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes*, Can. J. Math., 25 :585–602, 1973.
- [8] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] G.X. Viennot, *Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas*. In *Combinatoire énumérative* (Montréal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), volume 1234 de *Lecture notes in Math.*, pages 321–350, Springer, Berlin, 1986.